

6. INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO EN \mathbf{C}

6.1. FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

Repasemos algunas propiedades del conjunto de los números complejos $\mathbf{C} = \{z = a+ib : a, b \in \mathbf{R}\}$. No hay ningún número real x tal que $x^2 + 1 = 0$. Para que esa ecuación tenga solución es necesario introducir el número imaginario $i : i^2 = -1$. En \mathbf{C} están definidas las operaciones suma y producto:

$$(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d), \quad (a+ib) \cdot (c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$$

Con estas dos operaciones \mathbf{C} es un cuerpo: $+$ y \cdot son asociativas y conmutativas, existe la distributiva, existen elementos neutros ($z+0=z$ y $z \cdot 1=z$) e inversos:

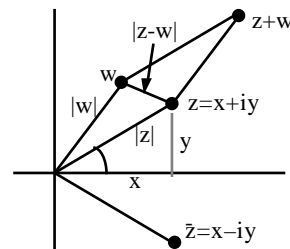
$$z = a+ib \quad -z = -a-ib \text{ tal que } z+(-z)=0, \quad z \neq 0 \quad z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2} \text{ tal que } z \cdot z^{-1} = 1$$

Se define la diferencia y cociente de complejos como: $z-w = z+(-w)$, $\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1}$ si $w \neq 0$.

[Lo que no se puede, a diferencia de \mathbf{R} , es definir un orden en \mathbf{C} compatible con las operaciones anteriores].

Dado $z = x+iy$, el complejo conjugado de z es $\bar{z} = x-iy$; y el módulo de z es $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Representando cada número complejo $z = x+iy$ como el punto del plano de coordenadas (x, y) , es fácil ver que el complejo suma $z+w$ está en el vértice opuesto al origen de un paralelogramo dos de cuyos lados son los segmentos que unen z y w con $O = (0, 0)$. El conjugado de z es la reflexión de z respecto del eje real $y=0$. El módulo es la distancia desde z al origen. La distancia de z a w viene dada por $|z-w|$.



Algunas propiedades de demostración inmediata son:

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{-z} = -(\bar{z}), \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}, \quad \overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}, \quad |z|^2 = z \cdot \bar{z}, \quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

Más difícil es probar (ver Spivak) que $|z+w| \leq |z| + |w|$ (el significado geométrico es claro).

Un z se puede escribir utilizando coordenadas polares: $z = x+iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, donde $r = |z|$ y θ es el ángulo que forma el segmento Oz con el eje x positivo. El θ no es único: todos los $\theta + 2k\pi$ nos dan el mismo z . Cualquiera de ellos se llama argumento de z . El argumento principal es el θ tal que $0 \leq \theta < 2\pi$. El θ se halla utilizando que $\tan \theta = y/x$ y mirando el cuadrante en que está el z .

Por ejemplo, para $z = -2+2i$ es $|z| = 2\sqrt{2}$; como $\tan \theta = -1$ y z es del tercer cuadrante, también se puede escribir (con el argumento principal) en la forma $z = 2\sqrt{2} [\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi]$ (ó con otro θ : $z = 2\sqrt{2} [\cos \frac{11}{4}\pi + i \sin \frac{11}{4}\pi]$).

Más adelante justificaremos que si θ es cualquier real: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ (complejo de módulo 1). Esto nos proporciona una forma más corta de expresar un complejo en polares:

$$z = r e^{i\theta}, \text{ donde } r = |z| \text{ y } \theta \text{ es un argumento de } z.$$

Las formas polares son muy útiles para efectuar productos y potencias:

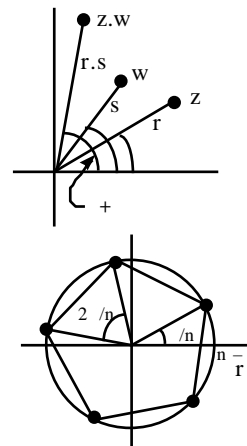
Si $z = r e^{i\theta}$, $w = s e^{i\phi}$ entonces: $z \cdot w = r s e^{i(\theta + \phi)} = r s [\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)]$,

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s} e^{i(\theta - \phi)} = \frac{r}{s} [\cos(\theta - \phi) + i \sin(\theta - \phi)], \quad z^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

Todo $z = r e^{i\theta} \neq 0$ tiene exactamente n raíces n -simas distintas dadas por

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}} = \sqrt[n]{r} (\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n}) \text{ donde } \theta_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k=0, \dots, n-1.$$

[las dos primeras son inmediatas; la del z^n se prueba por inducción, para la raíz basta elevar a n y observar que si $k=n, n+1, \dots$ se repiten los ángulos de antes] Vemos que las n raíces están situadas en los vértices de un polígono regular.



Hagamos una serie de operaciones de repaso de la aritmética compleja:

Calcular $|i(2+i)^{-1}(\overline{3-4i})|$. Basta hacer uso de las propiedades del módulo: $|i| = \frac{|i||3-4i|}{|2+i|} = \frac{1 \cdot 5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

[Vamos ahora a hacerlo dando un rodeo calculando el complejo que está dentro del módulo:

$$\frac{i[3+4i]}{2+i} = \frac{[3i-4][2-i]}{[2+i][2-i]} = \frac{3-8+6i+4i}{5} = -1+2i, \text{ cuyo módulo es, desde luego, } \sqrt{5}]$$

Calcular $w=(1-i)^6$. Directamente: $w = 1+6(-i)+15(-i)^2+20(-i)^3+15(-i)^4+6(-i)^5+(-i)^6 = 1-6i-15+20i+15-6i-1 = 8i$

En polares: $r = \sqrt{2}$, $\tan = -1 = \frac{7}{4}$ (es del cuarto cuadrante). Así: $(\sqrt{2} e^{i7/4})^6 = 8e^{21i/2} = 8e^{i/2} = 8i$.

Hallar las raíces cúbicas del número complejo $z = \frac{7+i}{1-i}$. Podemos hacer: $z = \frac{[7+i][1+i]}{[1-i][1+i]} = \frac{6+8i}{2} = 3+4i = 5 e^{i \arctan(4/3)}$

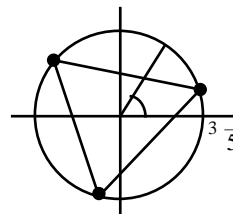
En polares: $7+i = 5\sqrt{2} e^{i \arctan(1/7)}$, $1-i = \sqrt{2} e^{i7/4}$, $z = 5e^{i[\arctan(1/7)+7/4]}$

[las dos expresiones de z coinciden: en prob4 vimos que $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$]

Por tanto, $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{5} e^{i \frac{\arctan(4/3)}{3} + \frac{2k}{3}}$, $k=0,1,2$

[con calculadora: $\arctan(4/3) = 0.927$; $0.309, 2.403, 4.498$;

volviendo a cartesianas: $z = 1.63+0.52i, -1.26+1.15i, -0.36-1.67i$]



Factorizar el polinomio real x^4+1 (lo habíamos necesitado para hallar la última primitiva del capítulo anterior).

Las raíces del polinomio son las cuatro raíces complejas de $-1=1e^{i\pi}$ que son $\sqrt[4]{1} e^{i\pi/4}$ con $\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$.

Es decir, $z_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2} [1 \pm i]$, $z_{3,4} = \frac{\sqrt{2}}{2} [-1 \pm i]$ (complejos conjugados dos a dos, como debían; a las mismas raíces

llegaríamos, desde luego, buscando los z tales que $z^2 = \pm i$, pero el camino sería mucho más largo). Por tanto:

$$x^4+1 = [(x-z_1)(x-z_2)][(x-z_3)(x-z_4)] = [x^2-(z_1+z_2)x+z_1z_2][x^2-(z_3+z_4)x+z_3z_4] = [x^2-\sqrt{2}x+1][x^2+\sqrt{2}x+1]$$

Hallar las raíces de la ecuación $z^2-iz-1-i=0$. La fórmula $z = \frac{1}{2a}[-b \pm \sqrt{b^2-4ac}]$ sigue siendo válida si interpretamos

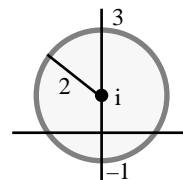
$\sqrt{}$ como una de las raíces del complejo b^2-4ac (no tiene sentido decir "la raíz positiva" de un complejo).

En nuestro caso: $z = \frac{1}{2}[i \pm \sqrt{3+4i}]$. Trabajemos en cartesianas: buscamos $z=x+iy$ tal que $z^2 = x^2-y^2+2xyi = 3+4i$.

Debe ser $x^2-y^2=3$ y $2xy=4$. Hay dos soluciones reales de este sistema: $x=2, y=1$ y $x=-2, y=-1$.

[hallando la raíz en polares obtendríamos $\sqrt{5} e^{i\pi/4}$, $= \frac{\arctan(4/3)}{2} + k$, $k=0,1$, que deben coincidir con $\pm(2+i)$]

Las dos raíces z buscadas son pues: $z = \frac{1}{2}[i+(2+i)] = 1+i$ y $z = \frac{1}{2}[i-(2+i)] = -1$.



Representar en el plano complejo los z que satisfacen $|z-i|<2$. Si $z=x+iy$ la desigualdad se

convierte en $|x+i(y-1)|<2$ $x^2+(y-1)^2<4$. Los z buscados son los del círculo de centro (0,1) y radio 2, sin el borde (claro, los z que distan del complejo i menos que 2).

Expresar $\cos 3$ y $\sin 3$ en términos de \cos y \sin utilizando potencias de complejos.

$$\cos 3 + i \sin 3 = e^{3i} = [e^i]^3 = [\cos + i \sin]^3 = \cos^3 - 3 \cos \sin^2 + i [3 \cos^2 \sin - \sin^3]. \text{ De aquí:}$$

$$\cos 3 = 4 \cos^3 - 3 \cos, \quad \sin 3 = 3 \sin - 4 \sin^3$$

[saldría utilizando sólo propiedades reales de senos y cosenos de sumas, pero tardaríamos bastante más]

Pasemos ya a tratar las **funciones de variable compleja**. Una función $f(z)$ de variable compleja será una regla que asigna a cada complejo z de un dominio un único complejo $f(z)$.

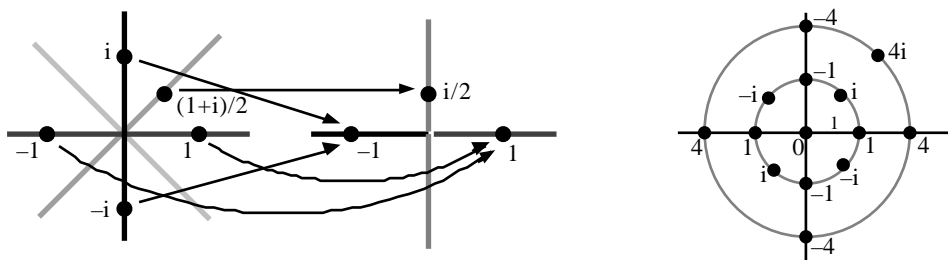
Como los reales son un tipo particular de números complejos podríamos hablar también de funciones reales de variable compleja, si $f(z)$ es real para cada z , o de funciones complejas de variable real (incluso las funciones reales de variable real vistas hasta ahora se pueden mirar como un tipo particular de funciones complejas).

Por ejemplo $f(z) = z^2$, $f(z) = \bar{z}$, $f(z) = f(x+iy) = \sin x + i \cos y$ son funciones complejas de variable compleja. Una función compleja de variable real es, por ejemplo, $f(x) = x+i$ si $x \in \mathbf{R}$. Funciones (importantes) reales de variable compleja son $f(z) = |z|$ (función "valor absoluto"), $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(x+iy) = x$, $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(x+iy) = y$ (funciones "parte real" y "parte imaginaria", respectivamente) y $\operatorname{Arg}(z) = \theta$, si θ es el argumento principal de z (función "argumento").

Cualquier función f de valores complejos puede escribirse en la forma $f = u+iv$, donde u y v (parte real y parte imaginaria de f) son funciones con valores reales (esto no siempre será útil).

Por ejemplo, así podemos expresar: $f(z) = z^2 = (x^2-y^2) + i(2xy)$, $f(z) = \bar{z} = x - iy$

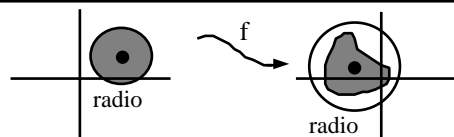
Pintar funciones complejas es mucho más difícil que las reales. Podríamos dibujar flechas entre dos planos complejos, o bien escribir el valor de $f(z)$ sobre cada z de un plano complejo. Las dos cosas están hechas abajo para $f(z) = z^2$:



Las definiciones de límites y continuidad son las de \mathbf{R} sustituyendo valores absolutos por módulos (, \mathbf{R} ; $z, a, L \in \mathbf{C}$):

Def: $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = L$ si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que si z cumple $0 < |z - a| < \delta$ entonces $|f(z) - L| < \epsilon$.
 f es continua en a si $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$ tal que si z cumple $|z - a| < \delta$ entonces $|f(z) - f(a)| < \epsilon$.

[Si un entorno es $B(a, r) = \{z \in \mathbf{C} : |z - a| < r\}$, que f es continua en a significa que podemos encontrar un entorno de a de radio lo suficientemente pequeño de forma que su imagen este contenida en un entorno de $f(a)$ de cualquier radio, por pequeño que sea]



Teor: f y g continuas en $a \in \mathbf{C}$ $f \pm g$, $f \cdot g$ y f/g (si $g(a) \neq 0$) son continuas en a .
 Si $f = u + iv$ (u, v reales), entonces f es continua en a si y sólo si u y v son continuas en a .

[las demostraciones del \pm , \cdot y $/$ son iguales que las reales, ya que seguimos teniendo la desigualdad triangular; para la otra: $|f(z) - f(a)| = |[u(z) - u(a)] + i[v(z) - v(a)]|$ es pequeño si y sólo si lo son $|u(z) - u(a)|$ y $|v(z) - v(a)|$]

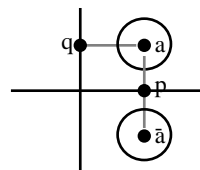
Ejemplos: es fácil ver que $f(z) = \text{constante}$ y $f(z) = z$ son continuas en cualquier a (por tanto, también lo son cualquier polinomio y cualquier cociente de polinomios donde el denominador no se anula).

$\text{Re}(z) = x$ e $\text{Im}(z) = y$ son continuas en todo a por el teorema anterior y porque $f(z) = z$ lo es.

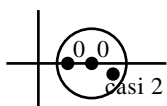
[o directamente: si $a = p + iq$; $|x - p|, |y - q| < \sqrt{|x - p|^2 + |y - q|^2} = |z - a| < \delta$ si $|z - a| < \delta = \epsilon$]

$f(z) = \bar{z}$ es continua en todo \mathbf{C} pues $|\bar{z} - \bar{a}| = |\overline{z - a}| = |z - a| < \delta$ si $|z - a| < \delta = \epsilon$

[o por el teorema y el ejemplo anterior: $u(z) = x$, $v(z) = -y$ lo son]



[como se verá en Cálculo II, una función de dos variables que sea composición de funciones continuas será también continua; así será fácil asegurar que lo es una función como, por ejemplo, $f(x + iy) = y \arctan(xy) + ix \cos(x + y)$]



Hay funciones discontinuas muy sencillas como $\text{Arg}(z)$ en cualquier a real positivo. En cualquier entorno de a hay puntos z en que $\text{Arg}(z)$ es casi 2π y por tanto $|\text{Arg}(z) - \text{Arg}(a)| = |\text{Arg}(z) - 0|$ no se puede hacer tan pequeño como queramos [en los demás a la función sí es continua]
 [si el argumento principal lo hubiésemos escogido en $(-\pi, \pi]$ conseguiríamos que la función $\text{Arg}(z)$ fuese continua en el semieje real positivo, pero la discontinuidad se trasladaría al negativo]

Def: $f(z)$ es derivable en $a \in \mathbf{C}$ si existe el $\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a)$

[Definición como la de \mathbf{R} ; también como allí se prueba que "derivable \Rightarrow continua" y los resultados para el cálculo:

$$(f \pm g)' = f' \pm g', (f \cdot g)' = f'g + fg', (1/g)' = -g'/g^2, (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

Con esto sabemos derivar polinomios y funciones racionales (más adelante también podremos derivar $\text{sen } z$, $\text{cos } z$ y e^z , pero por ahora ni siquiera sabemos lo que son estas funciones complejas)].

Hay funciones muy sencillas no derivables como $f(z) = \bar{z}$, pues el $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{x+iy \rightarrow 0} \frac{x-iy}{x+iy}$ no existe:

$(x-iy)/(x+iy)$ cuando $y=0$ vale 1 y cuando $x=0$ vale -1 ; el límite no puede existir pues el cociente toma valores 1 y -1 para z tan cercanos como queramos a 0.

[Sabiendo algo de derivadas parciales: se prueba en análisis complejo que para que una $f = u + iv$ sea derivable es necesario que $u_x = v_y$ y que $u_y = -v_x$ (ecuaciones de Cauchy-Riemann). Para $f(z) = \bar{z} = x - iy$ no se satisfacen, pues $u_x = 1$, $v_y = -1$. De hecho, la mayoría de las funciones definidas en la forma $f = u + iv$ serán no derivables, pues es mucha casualidad que u y v cualesquiera satisfagan dichas ecuaciones. Comprobemos que sí se cumplen para una función derivable como:

$$f(z) = z^2 \text{ (de derivada } f'(z) = 2z \text{): } u_x = 2x = v_y, u_y = -2y = -v_x \text{].}$$

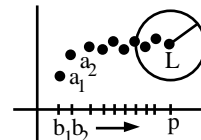
6.2. SERIES COMPLEJAS DE POTENCIAS

Comencemos con sucesiones $\{a_n\}$ \mathbf{C} de complejos, o sea, funciones de \mathbf{N} en \mathbf{C} [$|\cdot|$ módulo]:

Def: $\{a_n\} \rightarrow L$ si para todo $\epsilon > 0$ existe N natural tal que si $n > N$ entonces $|a_n - L| < \epsilon$

Para cualquier entorno de L casi todos los puntos de la sucesión están dentro:

Teor: Sea $a_n = b_n + ic_n$, con b_n y c_n reales y $L = p + iq$. Entonces
 $\{a_n\} \rightarrow L \iff \{b_n\} \rightarrow p$ y $\{c_n\} \rightarrow q$



$$\begin{aligned}) \quad & N \text{ tal que si } n > N \quad |a_n - L| = |(b_n - p) + i(c_n - q)| < \epsilon \iff (b_n - p)^2 + (c_n - q)^2 < \epsilon^2 \\ & \iff (b_n - p)^2 < \epsilon^2 \quad (c_n - q)^2 < \epsilon^2 \quad |b_n - p| < \epsilon \quad |c_n - q| < \epsilon \\) \quad & N_1, n > N_1 \quad |b_n - p| < \epsilon/2 \quad N_2, n > N_2 \quad |c_n - q| < \epsilon/2 \quad |a_n - L| = |b_n - p| + |i(c_n - q)| < \epsilon \quad \text{si } n > N = \max\{N_1, N_2\} \end{aligned}$$

Como en \mathbf{R} , una serie de complejos a_n se dice convergente si lo es su sucesión S_n de sumas parciales. Una consecuencia inmediata del teorema anterior es:

Teor: $a_n = b_n + ic_n$: a_n converge $\iff b_n$ y c_n convergen y se cumple $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + i \sum_{n=1}^{\infty} c_n$

a_n es absolutamente convergente si lo hace la serie real $|a_n|$. A esta serie de los módulos se le pueden aplicar todos los criterios de convergencia de series reales conocidos. Se tiene también que:

Teor: a_n absolutamente converge $\iff a_n$ converge

$$\text{Si } a_n = b_n + ic_n, |a_n|^2 = |b_n|^2 + |c_n|^2 \quad |b_n|, |c_n| \leq |a_n|; \quad |a_n| \text{ conv} \implies |b_n| \text{ y } |c_n| \text{ conv} \implies b_n \text{ y } c_n \text{ conv}$$

Ejemplos: $a_n = \sin \frac{1}{n} + i(2 + \frac{1}{n})^n$ diverge, pues $b_n = \sin \frac{1}{n} \rightarrow 0$ pero $c_n = (2 + \frac{1}{n})^n \rightarrow \infty$.

$$a_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)^n; \quad |a_n| = 2^{-n/2} \rightarrow 0 \quad a_n \rightarrow 0 \quad [\text{esto es intuitivamente claro y fácil de formalizar}]$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)^n \text{ converge pues } |a_n| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \text{ es serie geométrica convergente}$$

[como en \mathbf{R} se ve que: a_n convergente $\implies a_n \rightarrow 0$; esto es otra prueba de que la última $\{a_n\}$ converge]

$$\begin{aligned} \frac{i^n}{n} \text{ no converge absolutamente } \left(\frac{i^n}{n} \text{ div}\right), \text{ pero sí converge: } \frac{i^n}{n} &= i - \frac{1}{2} - \frac{i}{3} + \frac{1}{4} + \frac{i}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots\right) + i \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots\right) \text{ convergentes ambas por Leibniz.} \end{aligned}$$

Veamos ya las **series de potencias complejas**

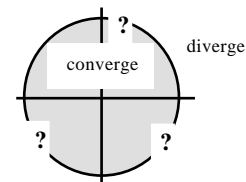
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \quad a_n, z \in \mathbf{C}$$

Se tienen resultados análogos a los de \mathbf{R} con demostraciones (que no hacemos) calcaditas de las de allí:

Teor: A cada serie de potencias está asociado un número positivo R , llamado radio de convergencia de la serie, que tiene las siguientes propiedades:
 si $R=0$, la serie sólo converge si $z=0$; si $R=\infty$, la serie converge para todo z ;
 si R es un número real positivo, la serie converge para $|z| < R$ y diverge para $|z| > R$.

Aquí el intervalo de convergencia se ha convertido en el círculo de convergencia $|z| < R$. Sobre la circunferencia $|z|=R$ no se puede asegurar nada. Como en los reales habrá series que convergen en toda ella, otras en puntos aislados, otras en ninguno...

El cálculo del R se puede hacer utilizando el criterio del cociente: $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$

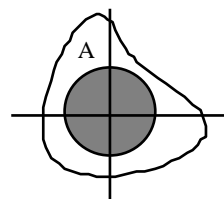


Estas series se pueden sumar, multiplicar, dividir,... igual que las reales y se tiene el mismo resultado sobre derivación:

Teor: Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ para $|z| < R$. Entonces f es derivable para $|z| < R$ y $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$

Como consecuencia las funciones definidas por series de potencias vuelven a ser infinitamente derivables (y por tanto también continuas) dentro del círculo de convergencia. Un resultado importante y sorprendente, que desde luego no es cierto en los reales, y que se prueba con técnicas más avanzadas de cálculo complejo es:

Teor: Una función $f(z)$ derivable en una región A del plano es infinitamente derivable en A .
Además, en todo círculo contenido en A la función $f(z)$ coincide con su serie de Taylor.



Definimos tres nuevas funciones complejas, que hasta ahora no tenían sentido:

$$\text{Def: } e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \text{sen } z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \text{cos } z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \quad z \in \mathbb{C}$$

El R de las tres series es ∞ . Estas funciones tienen propiedades (fáciles de probar) esperadas como:

$$(\text{sen } z)' = \text{cos } z, \quad (\text{cos } z)' = -\text{sen } z, \quad \text{sen}(-z) = -\text{sen } z, \quad \text{cos}(-z) = \text{cos } z, \quad (e^z)' = e^z, \quad e^{-z} = 1/e^z, \quad e^{z+w} = e^z e^w, \dots$$

Además de otras nuevas como:

$$e^{iz} = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} - \dots = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) = \text{cos } z + i \text{sen } z$$

[se pueden reordenar las series que convergen absolutamente y esta lo hace para todo z]

[si $z=y$ real obtenemos la prometida relación que nos permitió abreviar la forma polar: $e^{iy} = \text{cos } y + i \text{sen } y$]

[no es necesario sumar series para calcular las exponenciales de complejos: $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\text{cos } y + i \text{sen } y)$]

Mas relaciones: $e^{-iz} = \text{cos } z - i \text{sen } z$, $\text{sen } z = \frac{1}{2i}[e^{iz} - e^{-iz}]$, $\text{cos } z = \frac{1}{2}[e^{iz} + e^{-iz}]$.

$$[\text{Con ellas, por ejemplo, } \text{sen}(+i) = \frac{1}{2i}[e^{i(+i)} - e^{-i(+i)}] = \frac{-i}{2}[e^{-1}e^i - e^1e^{-i}] = \frac{i}{2}[e^{-1} - e^1] (= \text{sen } i)].$$

[Las funciones complejas $\text{sen } z$ y $\text{cos } z$ no están acotadas. En el eje imaginario, por ejemplo:

$$\text{sen}(iy) = \frac{1}{2i}[e^{-y} - e^y] = i \text{sh } y, \quad \text{cos}(iy) = \frac{1}{2}[e^{-y} + e^y] = \text{ch } y;$$

otro resultado clásico es que las únicas funciones acotadas y analíticas en todo el plano son las constantes].

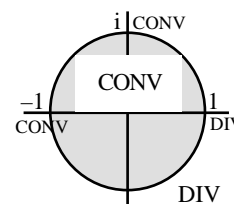
Lo visto para series complejas permite explicar situaciones sorprendentes de las funciones reales. ¿Por qué si tanto e^x como $1/(1+x^2)$ son $\mathbb{C}(\mathbb{R})$, la serie de la primera converge $\forall x$ mientras la de la segunda sólo lo hace en $(-1,1)$? Pues porque la serie $1 - z^2 + z^4 - \dots$ de $1/(1+z^2)$ ha de definir una función continua y en $z=\pm i$ esta función no lo es [esto sucede en general para todo cociente de polinomios complejos (reales, en particular): el radio R de su serie es la distancia al cero más próximo del denominador (en $|z| < R$ es derivable y, por tanto, analítica)]. También entendemos el extraño comportamiento de la función $f(x)=e^{-1/x^2}$, $f(0)=0$ que tiene infinitas derivadas pero sólo coincide con su serie de Taylor en $x=0$: como $f(iy)=e^{1/y^2}$, si $y \neq 0$, la función compleja no es siquiera continua en $z=0$.

Ejemplos: Estudiemos donde converge: $\frac{z^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \quad 1=R.$

Converge en el círculo $|z| < 1$ y diverge en $|z| > 1$. ¿Qué pasa en $|z|=1$? No converge absolutamente en esa circunferencia, pero podría converger en algunos z de ella.

Por ejemplo, si $z=-1$, la serie $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge por Leibniz; si $z=1$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge;

si $z=i$ converge, pues $\frac{i^n}{\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n}} + i \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$ y convergen ambas (Leibniz).



Desarrollemos en serie $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$. Que $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge $|z| < 1$ y que su suma es $\frac{1}{1-z}$ se prueba como en **R**.

$$\text{Así, } f(z) = \frac{1}{4} \frac{1}{1-[-z^2/4]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{4^{n+1}}, \quad |-z^2/4| < 1 \quad |z| < 2 \quad (\text{distancia de los ceros complejos al origen}).$$

[obsérvese que la serie no converge en ningún punto de la circunferencia $|z|=2$ pues para cualquier z con ese módulo nos queda una serie cuyo término general no tiende a 0 pues tiene módulo constante $1/4$].

Podemos desarrollarla también (dando rodeos) de otras formas. Descomponiendo en fracciones simples complejas:

$$\frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{4i} \left[\frac{1}{z-2i} - \frac{1}{z+2i} \right] = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{1-z/2i} + \frac{1}{1+z/2i} \right] = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{z^n}{(2i)^n} + \frac{(-z)^n}{(2i)^n} \right] = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^{2n}}{2^{2n}i^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{4^{n+1}}$$

Dividiendo (pues las manipulaciones con series complejas, como dijimos, son las mismas que con las reales):

$$[4+z^2][a_0+a_1z+a_2z^2+\dots] = 1 \quad 4a_0=1, a_0=\frac{1}{4}; \quad 4a_1=0, a_1=0; \quad 4a_2+a_0=0, a_2=-\frac{1}{16}, \dots$$